Reazioni nucleari di interesse astrofisico

Introduzione

Le velocita' di reazione

Scale di energia e densita'

Processi indotti da neutroni

Sezioni d'urto di particelle cariche

Fattori astrofisici

Il picco di Gamow e le velocita' di reazione

Dipendenza delle velocita' di reazione dalla temperatura

Introduzione

- I processi piu' importanti sono la cattura di neutroni :

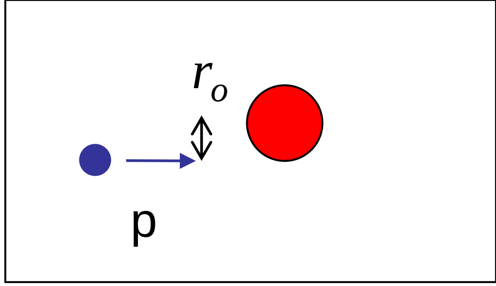
$$n + {}^{A}Z \rightarrow {}^{A+1}Z + \gamma$$

- e le reazioni fra nuclei:

$${}^{A1}Z_1 + {}^{A2}Z_2 \rightarrow {}^{A}Z + X$$

- Le prime sono importanti quando si hanno neutroni liberi, come primari nel big bang, o come prodotti di reazione in fasi avanzate della combustione stellare, ad es. da ${}^{22}Ne + {}^{4}He \rightarrow {}^{25}Mg + n$ oppure da reazioni di neutronizzazione.
- Reazioni fra nuclei sono importanti per formare elementi piu' pesanti a partire da nuclei piu' leggeri, sia nel big bang che nelle fasi di combustione stellare.

Scale di energia e momento angolare



- Le energie di collisione che ci interessano sono generalmente inferiori alla tipica scala nucleare, ordine 1MeV:
- La nucleosintesi primordiale diventa efficiente quando kT<100 keV, perche' altrimenti i primi prodotti (deuterio) si disintegrano per fotodissociazione.
- La nucleosintesi nel sole avviene a kT ≈ 1keV; stelle che bruciano Elio hanno KT ≈10KeV
- Gli impulsi tipici sono dunque $p \approx (kT\ m)^{1/2}$; ponendo mc^2=1GeV e kT=100 KeV si ha p ≈ 10 MeV/c
- Poiche' le tipiche dimensioni nucleari sono $r_0 \approx$ 1fm il momento angolare classico per la collisione e'

$$L = p\, r_0 = 10(\text{MeV/c fm}) \approx (1/20)\, \hbar,$$

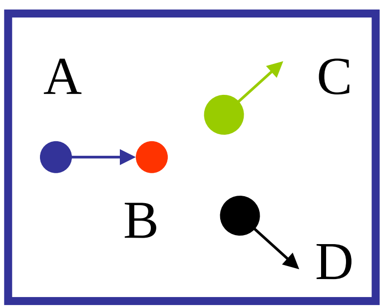
dunque i processi sono dominati dai piu' bassi momenti angolari quantisticamente possibili.

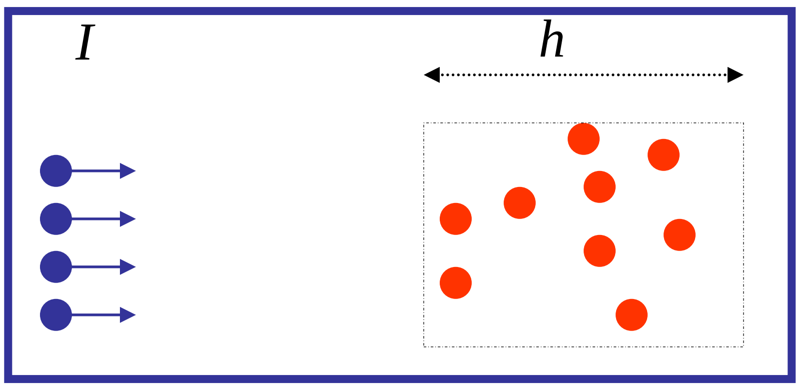
Richiamo I: La sezione d'urto

- La sezione d'urto è la principale osservabile media che caratterizza la collisione.
- Supponiamo di voler studiare la reazione A+B→C+D mandando un fascio di particelle A contro una "targhetta" (=target, bersaglio) di particelle B.
- Il fascio è caratterizzato dalla "corrente" *I* (numero di particelle prodotte per unità di tempo), dal tipo di particelle e dalla loro energia.
- La "targhetta" è caratterizzata dalla densità di bersagli (numero/volume) *n* e dallo spessore *h*.
- La quantità misurabile è il numero di reazioni per unità di tempo $\Delta N/\Delta t$.
- Se la targhetta è sottile (cioè è piccola la probabilità che ciascun proiettile faccia una collisione) il numero di reazioni che avvengono nell'unità di tempo è proporzionale alla corrente, alla densità e allo spessore:

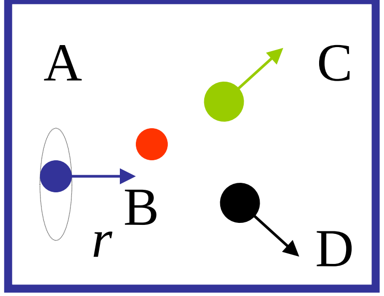
$$\Delta N/\Delta t = I\, n\, h\, \sigma.$$

- La costante di proporzionalità , che ha le dimensioni di $[L]^2$, si chiama sezione d'urto della reazione A+B->C+D





Richiamo II: La sezione d'urto



- Supponiamo che la reazione A+B-> C+D avvenga quando le particelle A e B si trovino a distanza $d<r$, con probabilità w.
- Per ciascuna particella (i) che entra nel bersaglio, la probabilità P_i di effettuare una reazione sarà data dal numero di incontri N_i che avvengono con distanza $d<r$, moltiplicata per la probabilità di reazione w in ciascun incontro, $P_i=N_i w$ *.
- Se medio su tante particelle $N_i \to \langle N \rangle = \pi r^2 \, n \, h$ e $P_i \to \langle P \rangle = \pi r^2 \, w \, n \, h$
- Se I è il numero di particelle che entrano nel bersaglio nell'unità di tempo, il numero di interazioni nell'unità di tempo sarà $I\langle P \rangle$ e dunque:

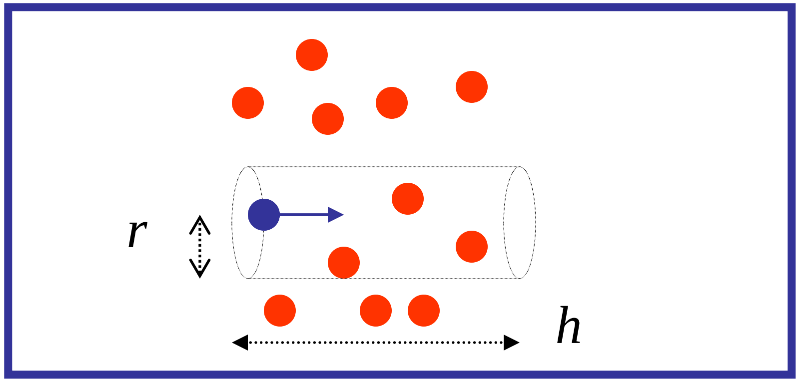
$$\Delta N/\Delta t = I \, n \, h \, \pi r^2 \, w$$

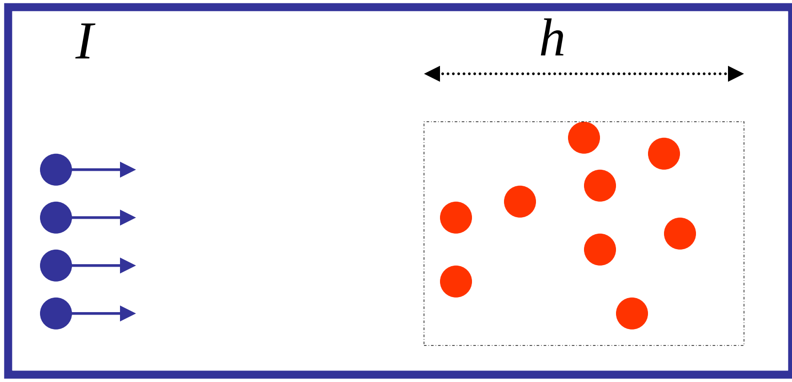
- Confrontando con la definizione di σ data da

$$\Delta N/\Delta t = I \, n \, h \, \sigma$$

- ne ricavo: $\boldsymbol{\sigma = \pi r^2 w}$

  *Questo è vero per una targhetta "sottile" in cui la probabilità di collisioni multiple è trascurabile.



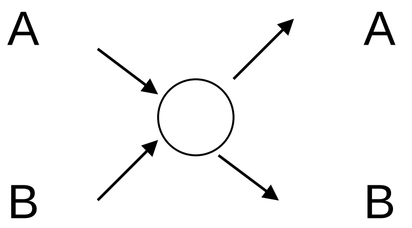


- **La sezione d'urto rappresenta il prodotto dell'area geometrica in cui avviene l'interazione per la probabilità che la stessa avvenga.**

Sezioni d'urto elastiche in meccanica quantistica

- Il processo di collisione che ci interessano vanno descritti quantisticamente, non relativisticamente e nel limite di bassa energia.
- In generale, la funzione d'onda Ψ(r)che descrive il moto relativo delle due particelle in collisione soddisfa a una equazione di Schroedinger a molte componenti, in corrispondenza dei diversi canali di reazione (elastico, inelastici).
- Quando ho **solo** il canale elastico, c'e' una sola componente, che soddisfa a:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V(r)\Psi = E\Psi$$



- dove $m=m_A m_B/(m_A+m_A)$, E e' l'energia di collisione, cioe' l'energia nel c.m e le condizioni asintotiche sono date da

$$\Psi_{as} = e^{ikz} + f(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

con $k^2 \hbar^2 = 2mE$

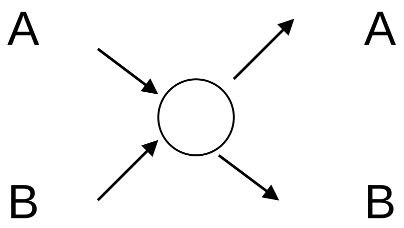
- La sezione d'urto differenziale per unita' di angolo solido e'

$$d\sigma / d\Omega = \left| f(\theta) \right|^2$$

- E la sezione d'urto elastica integrata e'

$$\sigma = 2\pi \int \sin\theta d\theta \left| f(\theta) \right|^2$$

Comportamento delle sezioni d’urto elastiche a bassa energia



- La funzione d’onda puo’ sempre essere sviluppata in autofunzioni del momento angolare.
- Per un potenziale V(r) il momento angolare orbitale e’ conservato. Lo sviluppo in armoniche sferiche della Ψ corrisponde a uno sviluppo della ampiezza di scattering

$$f(\vartheta) = (1/2ik)\sum_l (2l+1) f_l P_l(\cos\theta)$$

- In termini delle ampiezze f_l, per l’ortogonalita’ delle autofunzioni del momento angolare la sezione d’urto integrata e’:

$$\sigma = \sum \sigma_l = \sum 4\pi(2l+1)\left|f_l\right|^2$$

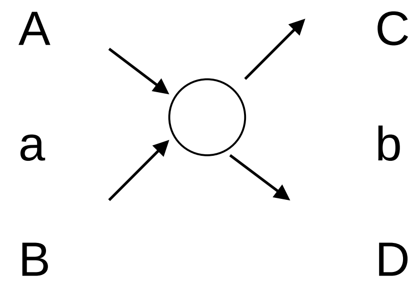
- Si dimostra che nel limite di bassa energia, per potenziali che decrescono sufficientemente alla svelta con r*, f_l e’ proporzionale a k^{2l} e quindi il contributo dominante viene da l=0.
- Ne segue che per k->0:

  A)la sezione d’urto differenziale e’ isotropa

  B)la sezione la sezione d’urto elastica tende a una costante

*)*Il caso coulombiano, V=1/r non rispetta questa condizione*

Sezioni d'urto per processi inelastici



- Consideriamo, per semplicita' il caso di collisioni a due corpi

$$A+B \rightarrow C+D$$

- Sono reazioni eso-energetiche quelle per cui

$$M_A+M_B > M_C+M_D$$

- Reazioni endoenergetiche sono quelle per cui

$$M_A+M_B < M_C+M_D$$

- In teoria del potenziale, il problema e' essere descritto da una equazione di Schroedinger a piu' componenti , una per ciascun canale, $\Psi = (\Psi_a, \Psi_b, \ldots)$ con le condizioni al contorno

  $\Psi_a = \exp(ik_a z) + f_{aa}(\theta)\exp(ik_a r)/r$ nel canale elastico (a)

  $\Psi_b = f_{ab}(\theta)\exp(ik_b r)/r$ negli altri canali ($b \neq a$)

  dove k esprime l'impulso associato al moto relativo delle due particelle nel canale considerato per fissata energia E, ad es:

$$k_a^2 \hbar^2 = 2m_a E = 2E m_A m_B/(m_A+m_B)$$

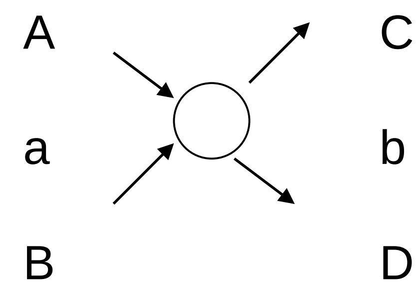
- Le sezioni d'urto differenziali sono

$$d\sigma_{ab} = |f_{ab}|^2\, p_C/p_A\, d\Omega_C$$

  dove p_A (p_C) e' l'impulso della particella proiettile (ovvero di quella prodotta).

$$d\sigma_{ab}=|f_{ab}|^2\, p_C/p_A\, d\Omega_C$$

Comportamento delle sezioni d’urto inelastiche a bassa energia



- Nel limite di bassa energia solo l’onda S contribuisce e tutte le ampiezze f_{ab} tendono a valori costanti*.
- Dall’espressione precedente, $d\sigma_{ab}=|f_{ab}|^2\, p_C/p_A\, d\Omega_C$ si ricava che:

  A)per reazioni esotermiche, che possono avvenire ad energie arbitrariamente piccole, poiche’ f_{ab} tende a costante e p_C a un limite finito**,

$$\sigma_{in} = \text{cost}\ v^{-1}$$

  B) per reazioni endotermiche, esiste una soglia di energia Δ. Il processo puo’ avvenire purche’ l’energia di collisione soddisfi a $E=½\, k_a m_a^{\;2} > \Delta$ e l’impulso del moto relativo nello stato finale e’ dato da $½\, k_b m_b^{\;2} = E-\Delta$. L’impulso p_C’ di ciascuna particella nello stato finale e’ proporzionale a k_b e dunque a $(E-\Delta)^{1/2}$. Cio’ significa che in un processo in onda S il comportamento delle sezioni d’urto in prossimita’ di una soglia di reazione e’

$$\sigma_{in} = \text{cost}\ (E-\Delta)^{1/2}$$

- ** da considerazioni generali, purche’ il potenziale decresca velocemente con r, vedi Landau.*
- ***Notare che un argomento simile da’ da’ σ_{el} cost*

Sezioni d'urto e velocita' di reazione

- La sezione d'urto esprime la probabilita' d'interazione per una fissata energia di collisione. In un plasma, si ha in generale una **distribuzione di energie** di collisione, e la velocita' di reazione e' un concetto piu' direttamente utilizzabile.
- Se si hanno n_A ed n_B particelle di tipo A e B , distinguibili*, per unita' di volume, e se v e' la loro velocita' relativa, il numero di interazioni per unita' di volume e di tempo e'

$$r = n_A n_B \sigma_{AB}(v)v$$

- Se f(v) e' la distribuzione delle velocita' relative [$\int_o dvf(v)=1$], il numero di interazioni per unita' di volume e di tempo e'

$$R = \langle r \rangle = n_A n_B [\int_o dv\, \sigma_{AB}(v)vf(v) = n_A n_B \langle \sigma_{AB} v \rangle$$

dove $\langle \sigma_{AB} v \rangle$ e' definita come la velocita' di reazione per coppia di particelle

**Se le particelle sono identiche, non posso distinguere la coppia AB da BA e devo inserire un ulteriore fattore ½ nel computo delle interazioni, r*

La distribuzione di velocita' dei nuclei

- La distribuzione di Maxwell-Boltzmann e' generalmente adeguata per le collisioni nucleari nei plasmi astrofisici e primordiali, in quanto:
- A)i tempi di termalizzazione sono generalmente assai brevi rispetto ai tempi scala delle collisioni nucleari
- B) i nuclei in gioco hanno velocita' non relativistiche
- C) Nelle condizioni in cui si muovono i nuclei gli effetti di degenerazione quantistica sono generalmente trascurabili.
- D)Le energie di interazione sono generalmente trascurabili rispetto alle energie cinetiche

- C segue dal fatto che lo spazio delle fasi disponibile per particella,

  $\Phi = \int_o d^3p\, d^3q \approx (mkT)^{3/2}\, n^{-3}$

  e' grande rispetto alla dimensione della cella quantistica, h^3.

  Da notare che questa condizione e' soddisfatta in genere per i nuclei, ma non per gli elettroni.
- D corrisponde a dire che i nuclei in collisione sono un gas perfetto, cioe' in media $\langle T \rangle \gg \langle V \rangle$. Questa condizione puo' valere anche in plasmi densi: ad esempio nell'interno del sole $T \approx$ keV mentre $V \approx 10$ eV

La distribuzione di Maxwell Boltzmann

- Se un sistema all'equilibrio termodinamico alla temperatura T e' descritto da

  $E=p^2/2m + U(\mathbf{r})$

  la distribuzione di probabilita' nello spazio delle fasi e':

  $dP/d^3p d^3r = A \exp(-E/kT)$

  dove A e' una costante di normalizzazione.
- Per un gas perfetto $U(\mathbf{r})=0$, e dunque:

  $dP/d^3p d^3r = A \exp(-p^2/2mkT)$
- La distribuzione degli impulsi si ottiene integrando banalmente sul volume V:

  $dP/d^3p = AV \exp(-p^2/2mkT)$

  dove la nuova costante B=AV e' determinata richiedendo
- $\int dP/d^3p = 1$
- Il calcolo dell'integrale gaussiano (vedi appendice) determina AV e quindi

  $dP/d^3p=(2\pi mkT)^{-3/2} \exp(-p^2/2mkT)$
- Da $d^3p=4\pi p^2 dp$ posso ricavare la distribuzione del modulo dell'impulso:

  $dP/dp = 4\pi p^2(2\pi mkT)^{-3/2}\exp(-p^2/2mkT)$
- Da $E=p^2/2m$ segue $dE=pdp/m$ e quindi ricavo la distribuzione delle energie

  $dP/dE= m4\pi p(2\pi mkT)^{-3/2}\exp(-p^2/2mkT)$
- Ossia:

  $\mathbf{dP/dE= 2/\pi^{1/2} (kT)^{-3/2} E^{1/2} \exp(-E/kT)}$
-

Proprieta' della distribuzione di MB

- Il risultato importante e' la distribuzione di energia

$dP/dE= 2/\pi^{1/2}(kT)^{-3/2}E^{1/2}\exp(-E/kT)$

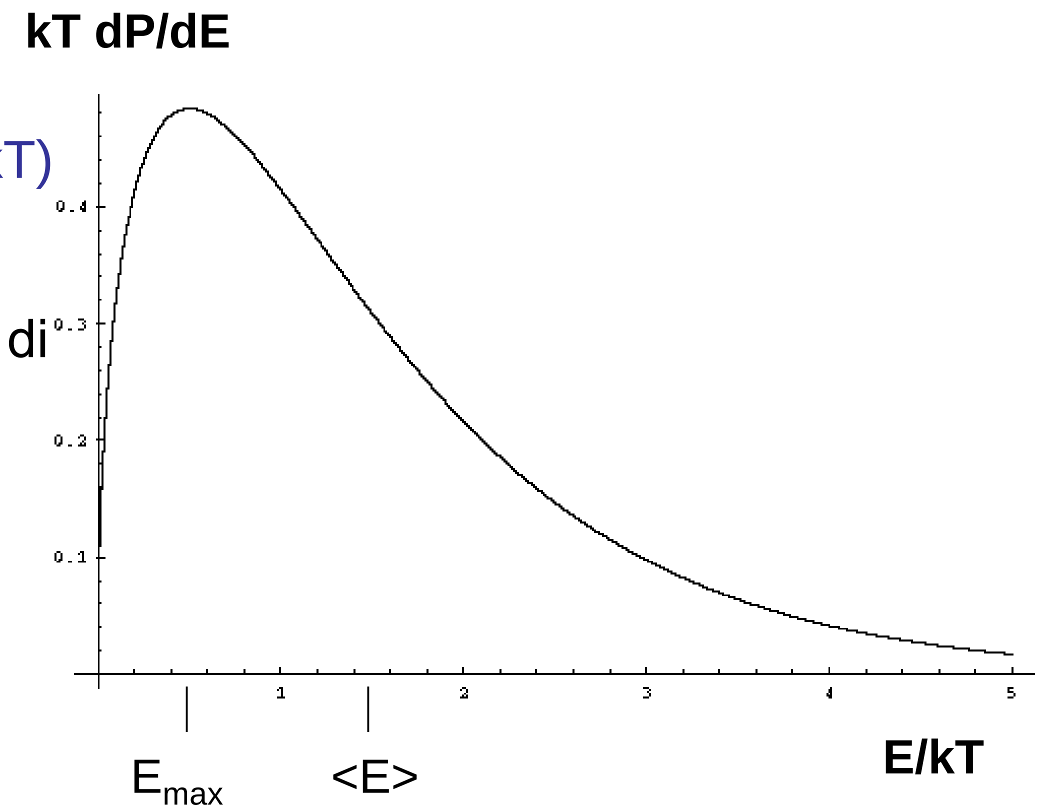
- Possiamo verificare che:

  i)e' soddisfatta la condizione di normalizzazione $\int dP/dE=1$

  ii)e' soddisfatto il teorema di equipartizione dell'energia

  $\langle E\rangle=3/2\ kT$

  iii) L'energia piu' probabile e' $E_{max}= ½\ kT$



La distribuzione delle velocita' relative e delle energie di collisione

- Se considero due particelle A e B non interagenti, la loro hamiltoniana e'

  $$H = p_A^2/2m_A + p_B^2/2m_B + U(\mathbf{r})$$

  Posso descrivere il sistema usando la coordinata del centro di massa **R**, la coordinata relativa **r** e i loro impulsi coniugati:

  $\mathbf{P} = p_A + p_A$; $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

  dove m e' la massa ridotta e v la velocita' relativa.
- In termini di queste variabili l' Hamiltoniana si scrive:

  $$H = \mathbf{P}^2/2m_{tot} + p^2/2m + U(\mathbf{r}) = H(\mathbf{P}) + h(\mathbf{p},\mathbf{r})$$

- Cioe' l'hamiltoniana e' fattorizzata in due termini:

  A)il primo esprime l' energia del centro di massa

  B)il secondo l'energia nel centro di massa, cioe' l'energia di collisione.
- Dal punto di vista termodinamico, i due termini possono essere trattati in maniera indipendente.
- Per il moto relativo dei due nuclei, basta considerare h(**p,r**).
- Nell'approssimazione di gas perfetto ho dunque per la distribuzione **dell'energia di collisione E**

  $$\mathbf{dP/dE = 2/\pi^{1/2} (kT)^{-3/2} E^{1/2} \exp(-E/kT)}$$

Velocita' di reazione e vite medie mediate su MB

- Poiche' le sezioni d'urto sono in genere espresse in termini dell'energia di collisione $E= \frac{1}{2} m v^2$ solitamente si esprimono le medie in termini di integrali sull'energia, effettuando un cambiamento di variabili di integrazione

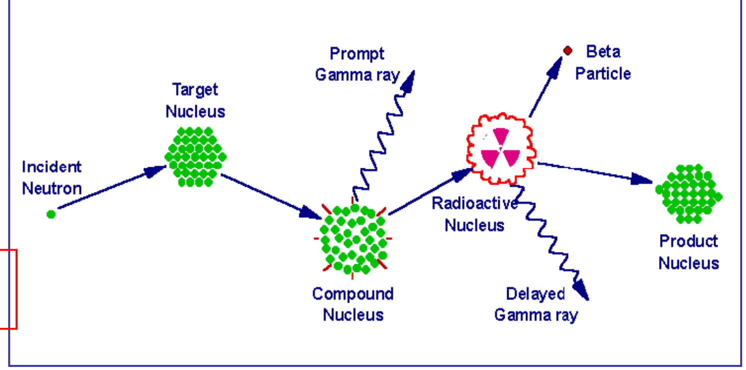
  (1) $<\sigma v> = (8/\pi m)^{1/2} (kT)^{-3/2} \int_o dE\ \sigma(E)\ E \exp(-E/kT)$
- La (1) e' essenziale per stabilire l'evoluzione chimica di un plasma. Nelle pagine successive discuteremo applicazioni della (1) per il caso di neutroni e di particelle cariche
- Osserviamo che il massimo dell'integrando esprime l'energia alla quale e' piu' probabile il processo; non e' detto che questa coincida con l'energia piu' probabile nella distribuzione di particelle
- Osserviamo che un nucleo, anche se stabile quando e' libero, diventa sostanzialmente instabile quando possono avvenire reazioni nucleari. Se l'unica reazione e' $A+B \rightarrow C+D$ la densita' numerica dei nuclei di tipo A evolve secondo:

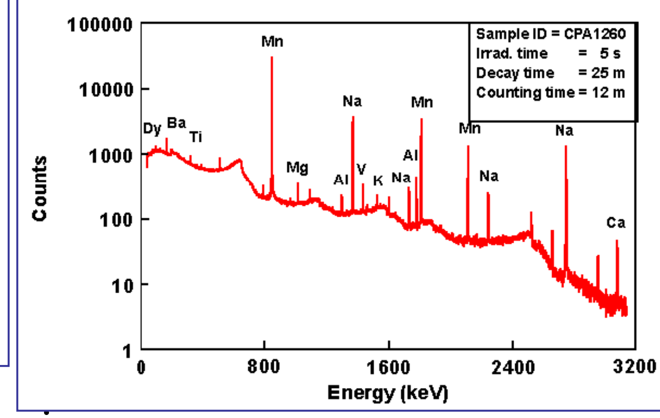
  $dn_A/dt= -n_A n_B <\sigma v>$

  quindi la popolazione dei nuclei A decresce esponenzialmente, con una velocita' di decadimento $\lambda_A= n_B <\sigma v>$ il cui inverso rappresenta la vita media del nucleo nelle condizioni specificate.

Richiami sulla cattura neutronica

$n + (Z,A) \rightarrow (Z,A+1) + \gamma$





- La cattura di neutroni e' il modo di rendere stabile i neutroni
- Il neutrone libero decade in $n \rightarrow p + e + \text{anti-}\nu$ con $\tau=885.7\pm0.8$ s. Questo processo può avvenire perché $Q_n=m_n-m_p-m_e=0.7$MeV e' >0
- Il deutone d=(p,n) è stabile, quindi il neutrone all'interno del nucleo é stabile.
- Il processo $d=(p,n) \rightarrow p + p + e + \text{anti-}\nu$ non può avvenire perché violerebbe la conservazione dell' energia, in quando $Q_d= m_d-2m_p-m_e=-E_b+Q_n=-2.2+0.7=-1.5$MeV.
- È l'energia di legame del nucleo che impedisce il decadimento del neutrone, nel deutone così come negli altri nuclei stabili.
- La cattura di neutroni su nuclei dà delle radiazioni specifiche del nucleo composto che viene prodotto; questo può essere formato in uno stato eccitato dal quale decade con emissione di fotoni verso lo stato di energia più bassa.
- **$n + (Z,A) \rightarrow (Z,A+1)^* + \gamma_1$;**

  $(Z,A+1)^* \rightarrow (z,A+1) + \gamma_2$
- Questo è un metodo per studiare sperimentalmente i livelli dei nuclei (neutron spectroscopy) e costituisce è un metodo efficiente per l'analisi degli elementi presenti in una sostanza (Neutron activation Analysis, NAA)*

*Vedi http://www.missouri.edu/~glascock/naa_over.htm

Cattura di neutroni

- Consideriamo la reazione $n + {}^{A}Z \rightarrow {}^{A+1}Z + \gamma$ dove ${}^{A+1}Z$ e' un nucleo stabile, o comunque $m(n)+ m({}^{A}Z) > m({}^{A+1}Z)$.
- La reazione e' esotermica e dunque a bassa energia σv= costante.
- Nel plasma, l'energia delle particelle che danno il massimo contributo alla reazione corrisponde all' energia piu' probabile $E_T=1/2kT$
- Conoscere la sezione d'urto per assorbimento di neutroni su A ad una energia E_T (σ_A) e' dunque sufficiente per determinare:

$$< \sigma v >= \sigma v= \sigma_A \,(2E_T/m)^{1/2}$$

- Si considerino dei nuclei in un ambiente con densita' *n* di neutroni. Se l'unico processo importante e' la cattura dei neutroni, le densita' delle specie nucleari evolvono come:

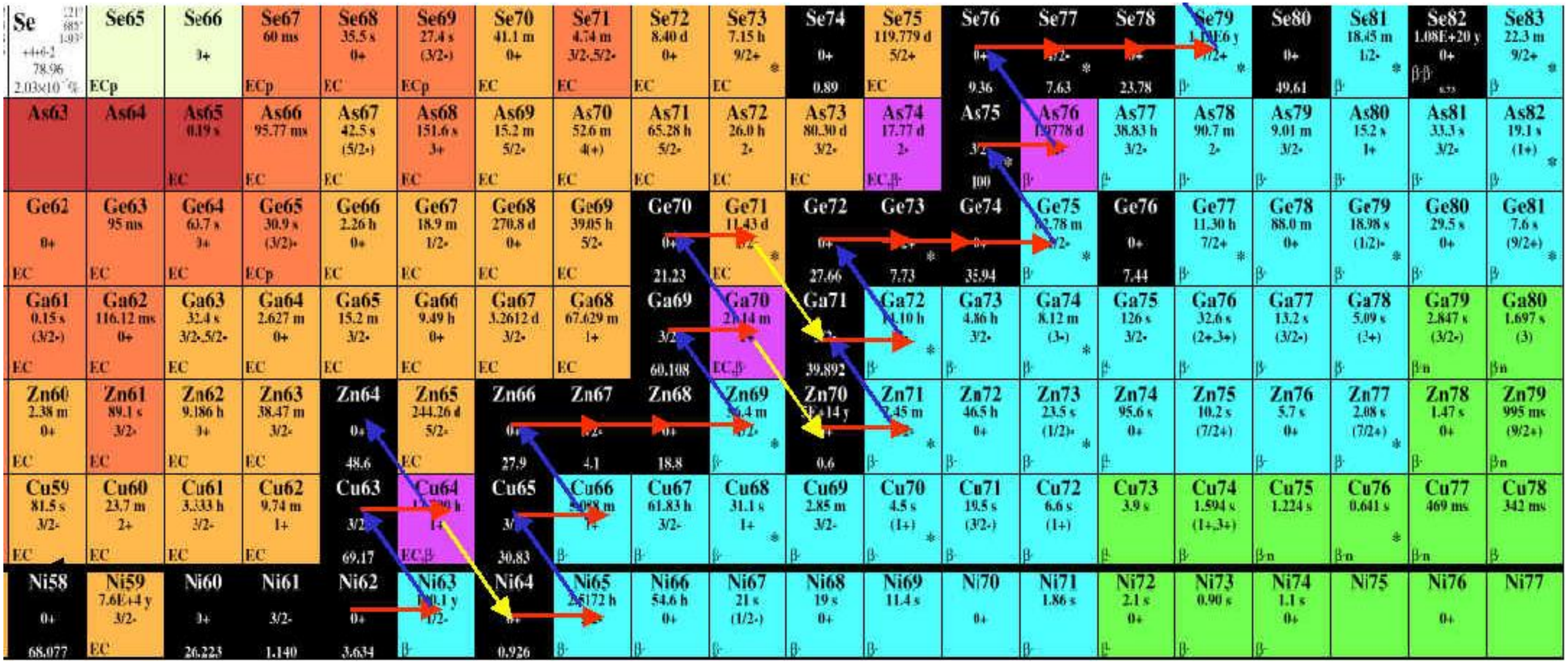
$$dn_A/dt = n <\sigma v>_{A-1} n_{A-1} - n<\sigma v>_A n_A$$

- La condizione di equilibrio $dn_A/dt=0$ corrisponde dunque a:

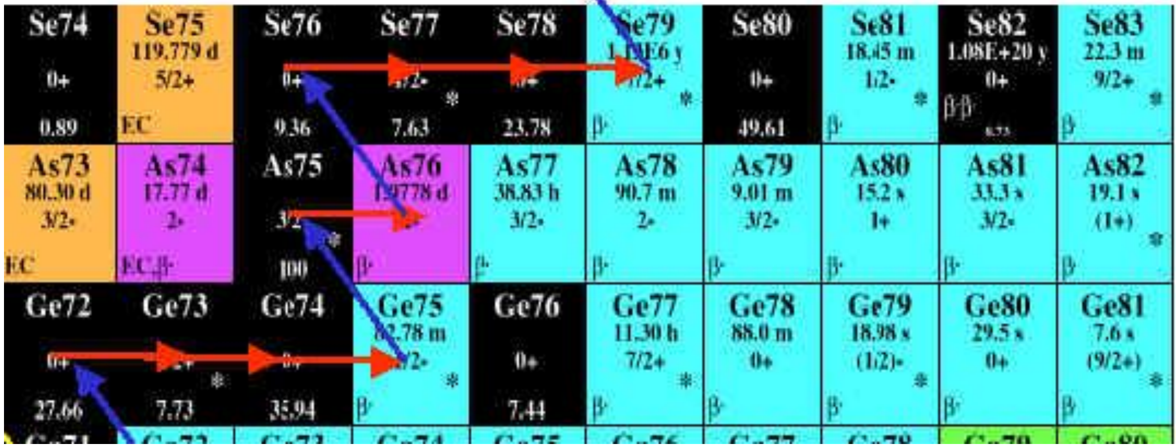
$$n_{A-1} \;\; \sigma_{A-1} = n_A \;\; \sigma_A$$

- Cioe' le densita' delle varie specie sono inversamente proporzionali alla rispettive sezioni d'urto.

La cattura di neutroni e la formazione degli elementi pesanti



La distribuzione degli elementi pesanti nei processi s (I)



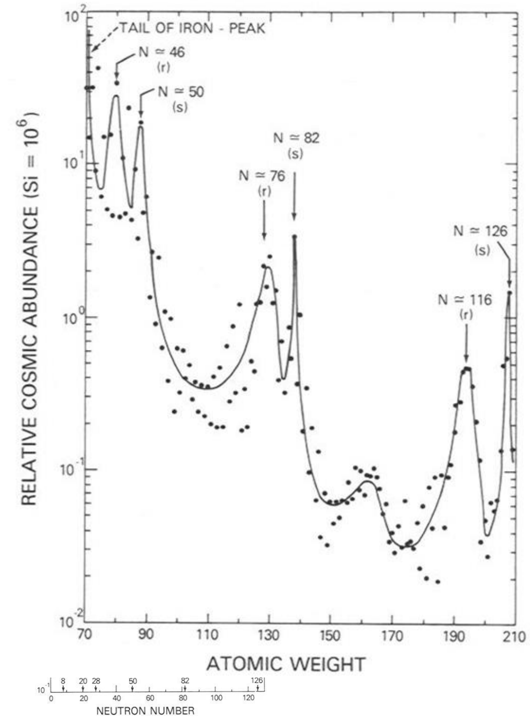
- Un’importante applicazione e’ per la distribuzione di elementi pesanti nel processo s (assorbimento “slow” di neutroni), cioe’ quei processi in cui la cattura di neutroni e’ lenta rispetto ai decadimenti beta dei nuclei.
- L’equazione per le densita’ dei vari nuclei (Z,A) e’ in generale piu’ complicata della precedente:

$$dn_{Z,A}/dt = n \langle\sigma v\rangle_{A-1} n_{Z,A-1} - n\langle\sigma v\rangle_{A} n_{,Z,A} - \lambda_{Z} n_{,Z,A} + \lambda_{Z-1} n_{,Z-1,A}$$

dove gli ultimi termini rappresentano i contributi dei decadimenti beta.

- Senza questi contributi, cioe’ per nuclei stabili, riottengo l’equazione precedente.
- Se i decadimenti sono piu’ veloci dei processi di cattura di neutroni, per ogni A sostanzialmente viene popolato solo il (solo) nucleo stabile.
- Nel piano (N,Z) le specie nucleari prodotte per cattura di neutroni e decadimenti beta sono descritte da una linea a zig-zag

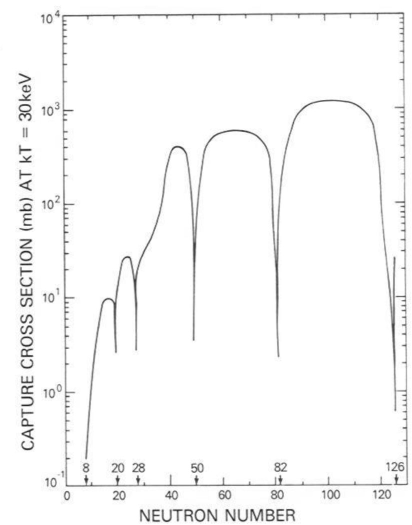
Gli elementi prodotti mediante processi s

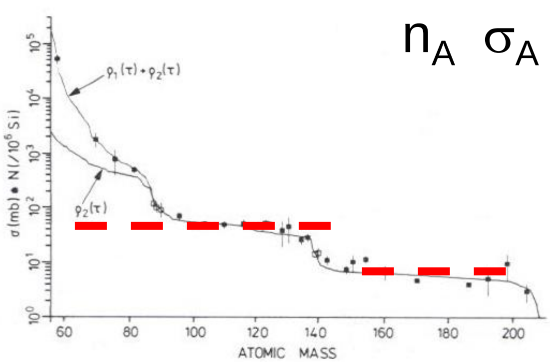


- In conclusione, nell' ipotesi che i nuclei siano stabili, oppure che il processo di cattura nucleare sia lento rispetto al decadimento beta, si possono eliminare gli ultimi termini, riottenendo l'equazione della trasparenza precedente

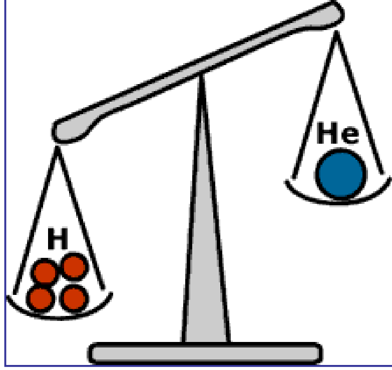
  $dn_A/dt = n\langle\sigma v\rangle_{A-1} n_{A-1} - n\langle\sigma v\rangle_A n_A$]
  interpretata come equazione per la densita' dei nuclei stabili fissato A.
- Le abbondanze osservate per i nuclei pesanti prodotti mediante il processo s soddisfano con buona approssimazione alla legge

$$n_A \ \sigma_A = \text{costante}$$





Collisioni fra particelle cariche: La nascita dell' astrofisica nucleare*



- In 1919, Henry Norris Russell, the leading theoretical astronomer in the United States, summarized in a concise form the astronomical hints on the nature of the stellar energy source. Russell stressed that the most important clue was the high temperature in the interiors of stars.
- F. W. Aston discovered in 1920 the key experimental element in the puzzle. He made precise measurements of the masses of many different atoms, among them hydrogen and helium. Aston found that four hydrogen nuclei were heavier than a helium nucleus. This was not the principal goal of the experiments he performed, which were motivated in large part by looking for isotopes of neon.
- The importance of Aston's measurements was immediately recognized by Sir Arthur Eddington, the brilliant English astrophysicist. Eddington argued in his 1920 presidential address to the British Association for the Advancement of Science that Aston's measurement of the mass difference between hydrogen and helium meant that the sun could shine by converting hydrogen atoms to helium.
- This burning of hydrogen into helium would (according to Einstein's relation between mass and energy) release about 0.7% of the mass equivalent of the energy. In principle, this could allow the sun to shine for about a 100 billion years.
- In a frighteningly prescient insight, Eddington went on to remark about the connection between stellar energy generation and the future of humanity:
- *"If, indeed, the sub-atomic energy in the stars is being freely used to maintain their great furnaces, it seems to bring a little nearer to fulfillment our dream of controlling this latent power for the well-being of the human race---or for its suicide"*

- **http://www.nobel.se/physics/articles/fusion/sun_3.html*

Eddington , Jeans e Gamow

- There was a long running scientific argument between **Jeans** and **Eddington** over the mechanism by which energy was created in stars. **Jeans** favoured, incorrectly as it turned out, the theory that the energy was the result of contraction while **Eddington**, correctly of course, believed it resulted from a slow process of annihilation of matter.
- The next major step in understanding how stars produce energy from nuclear burning, resulted from applying quantum mechanics to the explanation of nuclear radioactivity. This application was made without any reference to what happens in stars. According to classical physics, two particles with the same sign of electrical charge will repel each other, as if they were repulsed by a mutual recognition of 'bad breath'. Classically, the probability that two positively charged particles get very close together is zero. But, some things that cannot happen in classical physics can occur in the real world which is described on a microscopic scale by quantum mechanics.

James Jeans
1877-1946

- In 1928, George Gamow, the great Russian-American theoretical physicist, derived a quantum-mechanical formula that gave a non-zero probability of two charged particles overcoming their mutual electrostatic repulsion and coming very close together. This quantum mechanical probability is now universally known as the "Gamow factor." It is widely used to explain the measured rates of certain radioactive decays.

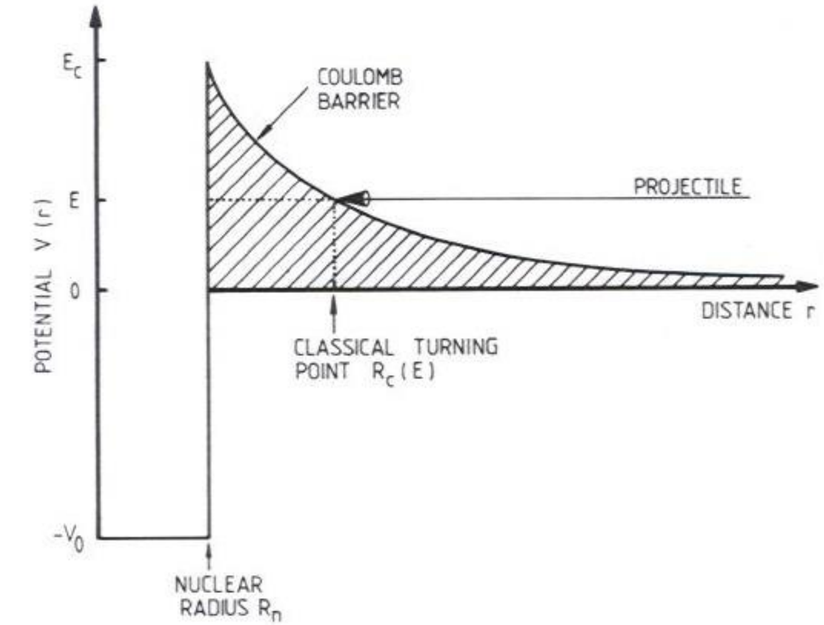
Collisioni fra particelle cariche

- In una collisione fra due nuclei Z_1 e Z_2 fino a distanze nucleari ci saranno interazione forti; al di la' resta la repulsione coulombiana

  $V_C(r)= Z_1Z_2\, e^2/r$
- La repulsione coulombiana a distanze nucleari ($R_n = r_0A^{1/3}$ con $r_0 \approx 1$fm) e' data da :

  $\varepsilon_C= V_C(R_n)= Z_1Z_2\, e^2/(r_0A^{1/3})$
- Per nuclei leggeri l'ordine di grandezza e' dato da

  $\varepsilon_C \approx e^2/ r_0 = (e^2 /\hbar c)\, \hbar c /r_0 =(1/137)$ 200MeVfm/1fm=1.4MeV
- Osserviamo che le energie di collisione disponibili, dell'ordine di kT, sono nei plasmi generalmente molto inferiori a questo valore.



- Secondo la fisica classica, la minima distanza R_c alla quale possono avvicinarsi nuclei con energia E e' data da

  $$R_c = Z_1Z_2\, e^2/E$$
- Poiche' questa quantita' e' in generale $>>R_N$, classicamente le reazioni nucleari non possono avvenire alle energie tipiche dei plasmi astrofisici
- Nelle stelle, come nel big bang, la possibilita' di reazioni nucleari e' strettamente collegata all'effetto tunnel.

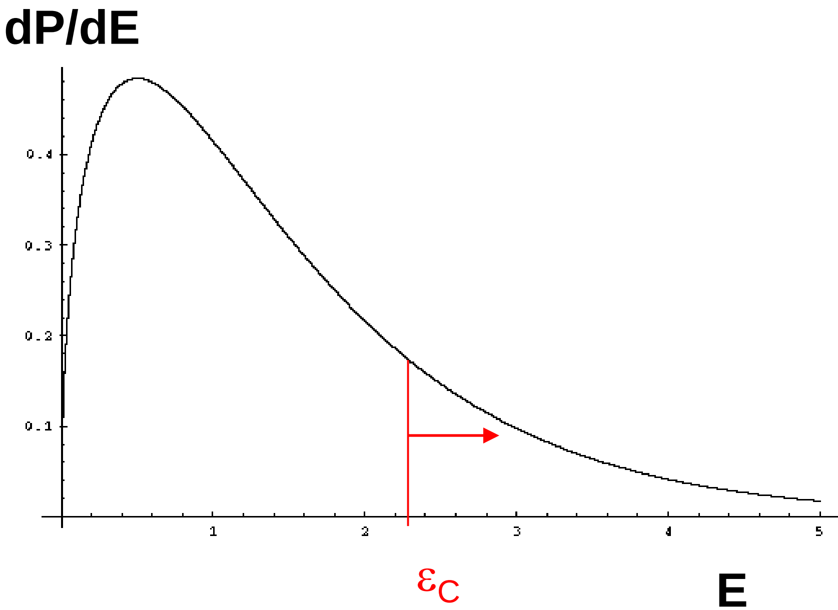
Osservazioni

- Si potrebbe obiettare che in una distribuzione di MB non esistono tagli superiori in energia e che e' e' possibile trovare nel plasma particelle con energia elevata rispetto a kT.
- Puo' questa coda essere all'origine delle reazioni nucleari nelle stelle?
- La frazione di (coppie di) particelle per cui l'energia di collisione e' piu' grande di ε_C e' data da dall'integrale di dP/dE oltre ε_C:

$$F(\varepsilon_C) = 2\pi^{-1/2}(kT)^{-3/2}\int_{\varepsilon_C}^{\infty} dE\sqrt{E}\,\exp(-E/kT)$$

- Ossia:

$$F(\varepsilon_C) = 2\pi^{-1/2}\int_{\varepsilon_C/kT}^{\infty} dx\sqrt{x}\,\exp(-x)$$



•Poiche' nell intervallo di integrazione x> ε_C /kT>1 posso scrivere $\sqrt{x}$ <x e quindi

$$F(\varepsilon_C) < 2\pi^{-1/2}\int_{\varepsilon_C/kT}^{\infty} x\exp(-x)dx$$

$$= 2\pi^{-1/2}(1+\varepsilon_C/kT)\exp(-\varepsilon_C/kT)$$

•Per $\varepsilon_C \approx$ 1MeV e kT≈ 1 keV (nell'interno del sole) ε_C/kT≈1000 e quindi F<10^3 exp(-1000) ≈10^{-430}, da confrontarsi col fatto che nel sole ho un numero di particelle dell'ordine di 10^{57} (e in tutto l'universo visibile circa 10^{70}) !!!

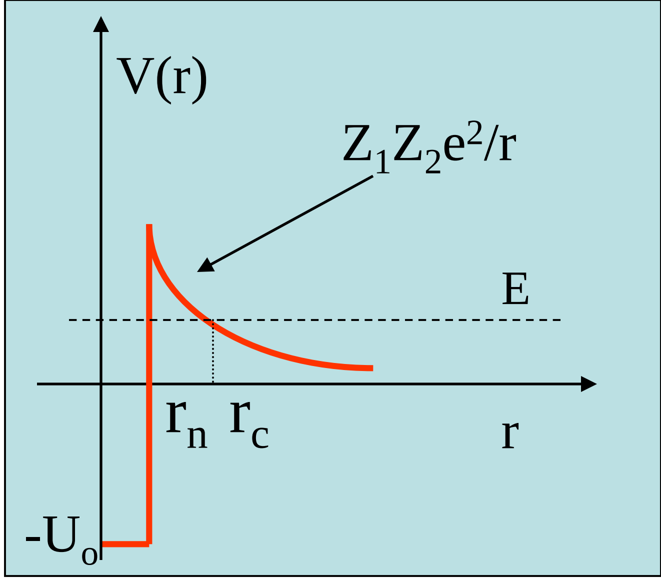
La penetrazione attraverso la barriera Coulombiana

- Il problema di far avvicinare due nuclei, fino a distanze nucleari per effetto tunnel, e' analogo al decadimento α, spiegato da Gamow in termine di un coefficiente di trasmissione dato da

$$P = \exp\left(- 2\pi Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v\right)$$

  dove $v = (2E/m)^{1/2}$ e P e' noto come fattore di Gamow
- Notare la dipendenza esponenziale da 1/v : la probabilita' di trasmissione e' esponenzialmente piccola quando le velocita' sono piccole
- Posso scrivere l'equazione come

$$P = \exp\left(- 2\pi v_c / \hbar v\right)$$

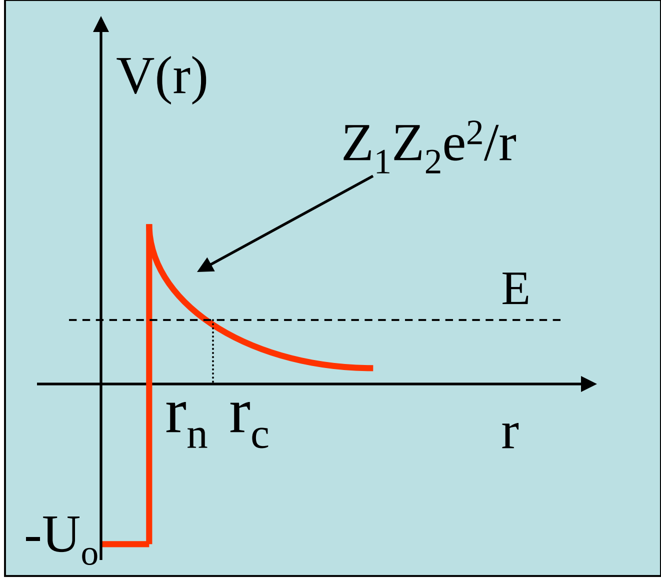


- Dove la scala di velocita' e' fissata dalla velocita' del problema coulombiano per due corcpi con cariche Z_1 e Z_2

$$v_c = Z_1 Z_2 e^2 / \hbar$$

- L'espressione (1) e' ottenuta in approssimazione semiclassica e trascurando l'estensione del nucleo.
- Per una trattazione piu' precisa vedi Landau QM e Rolfs,

La scala delle energie Coulombiane



- Si puo' esprimere la probabilita' in termini dell'energia di collisione E come

  $$P = \exp\left[-\left(E_C/E\right)^{1/2}\right]$$

  dove $E_C = \pi^2 m\, v_o^2$ e' la scala coulombiana delle energie.
- Esplicitando l'espressione di v_c ed m:

  $v_c = Z_1 Z_2\, e^2/\hbar \quad m = m_n A_1 A_2/(A_1+A_2)$

  (ove m_n e' la massa del nucleone)

  si trova:

  $E_C = (Z_1 Z_2)^2 A_1 A_2/(A_1+A_2)\, U_C$

  con :

  $U_C = \pi^2 m_n c^2 \alpha^2 \approx 500$ keV

- Da notare che questa scala e' in genere piu' grande di kT.
- Questo ha importanti conseguenze, in quanto nelle collisioni con E ≈ kT la probabilita' di attraversamento della barriera e' esponezialmente piccola

Le sezioni d’urto di fusione di particelle cariche

- Le sezioni d’urto di fusione di nuclei contengono 3 termini:
- 1)un termine proporzionale alla lunghezza di Debroglie al quadrato ($1/k^2$), e dunque inversamente proporzionale all’energia di collisione E
- 2) la probabilita’ di attraversamento della barriera, P(E)
- 3)un termine che esprime la probabilita’ di interazione nucleare, una volta superata la barriera.

- Le sezioni s’urto hanno dunque la forma:

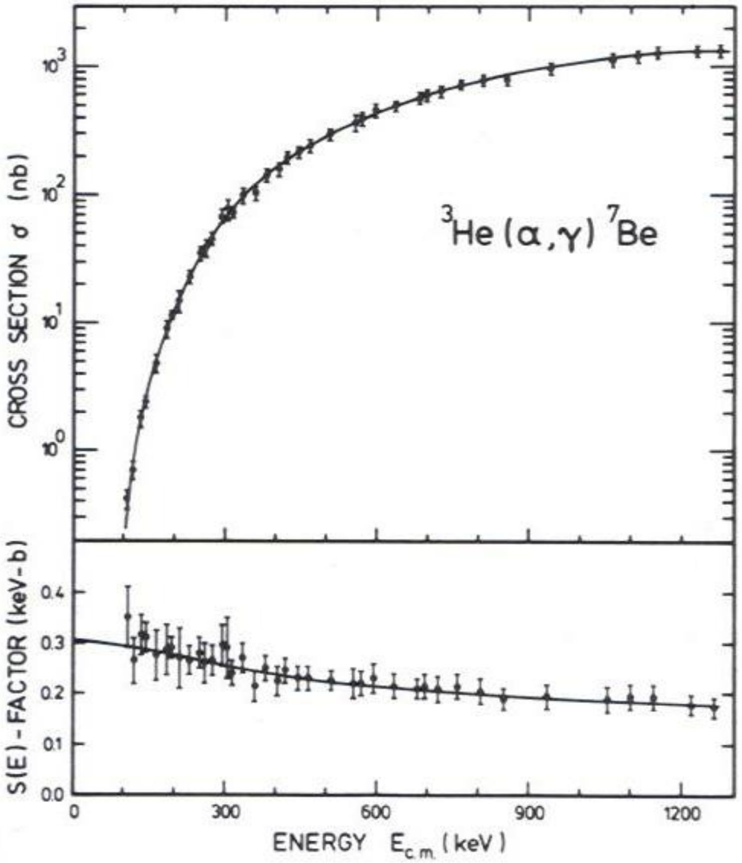
$$\boxed{\sigma(E) = \frac{S(E)}{E}\exp(-\sqrt{E_c / E})}$$

- Il fattore S(E) si chiama fattore astrofisico, ed esprime l’intensita’ dell’interazione.
- Le sue dimensioni sono ovviamente L^2 E , l’unita’ dimisura piu’ comune essendo MeV barn

Un esempio:
$^3He + ^4He \rightarrow ^7Be + \gamma$

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp(-\sqrt{E_c / E})$$

- A energie ordine 1MeV
  $\sigma \approx 10^{-6}$barn $=10^{-30}$cm^2
- La sezione d'urto decresce di 9 ordini di grandezza quando E =0.1 MeV
- Questo e' conseguenza della decrescita esponenziale,
- Notare che il fattore astrofisico estratto dai dati ha invece un andamento debolmente variabile con l'energia.
- Questo e' vero in generale, a meno della presenza di risonanze nella regione di energie di interesse



Ordini di grandezza dei fattori astrofisici

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp(-\sqrt{E_c / E})$$

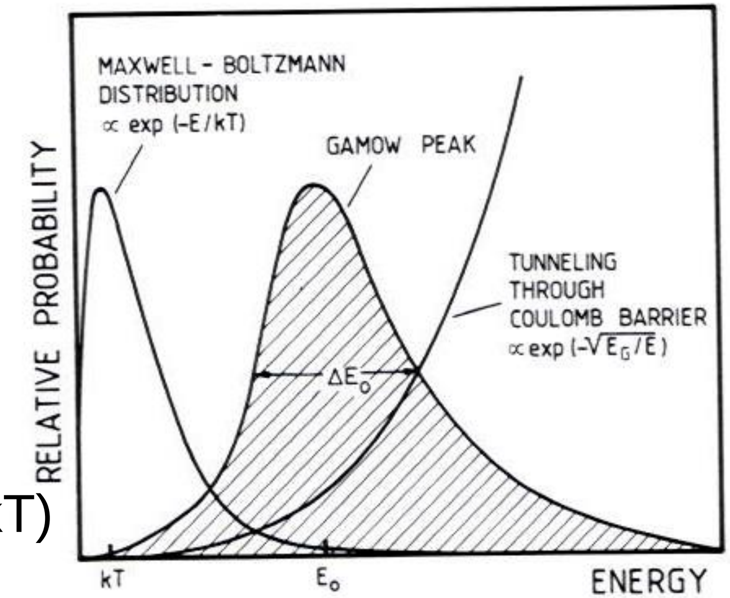
- E' conveniente considerare S(E), che ha un comportamento debolmente variabile con l'energia, rispetto a σ, che cambia di ordini di grandezza per piccole variazioni dell'energia di collisione.
- Per ciascuna reazione il fattore astrofisico caratterizza l'intensita' della forza in gioco.
- Nella tabella i valori di S(0) per processi deboli, e.m. e forti mostrano la gerarchia delle interazioni
- Per la reazione p+p il valore e' il risultato di un calcolo teorico
- Gli altri valori sono il frutto di estrapolazioni a zero energia di dati sperimentali
- La tabella mostra anche il Q-valore di ciascuna reazione

  $Q=\Sigma m_{in}-\Sigma m_{fin}$

  cioe' l'energia prodotta nella reazione.

Reazione	Processo	S(0) [MeV barn]	Q [MeV]
$p+p \rightarrow d+e^{+}+\nu$	debole	$4\ 10^{-25}$	0.42 MeV
$p+d \rightarrow {}^{3}He+\gamma$	e.m.	$2.5\ 10^{-7}$	5.5 MeV
${}^{3}He+{}^{3}He \rightarrow {}^{4}He+2p$	forte	5.0	12.9 MeV

Il picco di Gamow



- Si tratta di inserire

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E}\exp(-\sqrt{E_c / E})$$

- Nell'espressione per la velocita' di reazione
- $<\sigma v> = (8/\pi m)^{1/2} (kT)^{-3/2} \int_o dE\, \sigma(E)\, E \exp(-E/kT)$
- Il risultato e'

$$<\sigma v> = (8/\pi m)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty dE S(E) \exp[-E/kT - (E_c/E)^{1/2}]$$

- Mentre S(E) e' una funzione debolmente variabile, i due esponenziali variano molto, e con tendenze contrastanti:

  -il termine di penetrazione favorisce le energie alte

  -la distribuzione di MB, che decresce esponenzialmente al crescere dell'energia.

- Il risultato del prodotto e' una curva a campana, piccata intorno a E_o .
- Il picco (detto di Gamow) rappresenta la regione di energie che danno il massimo contributo al processo.

La posizione del massimo

- Nell' ipotesi che S sia una funzione lentamente variabile, nell'integrale puo' essere approssimata col suo valore al massimo, scrivendo:

$$<\sigma v>=(8/\pi m)^{1/2}\frac{S(E_0)}{(kT)^{3/2}}\int_0^\infty dE\exp[-E/kT-(E_c/E)^{1/2}]$$

- Per trovare la posizione del massimo devo dunque studiare la funzione entro il segno di integrale. Poiche' l'esponenziale e' una funzione monotona, basta trovare il punto di stazionarieta' di

$$f = (E/kT) + (E_C/E)^{1/2}$$

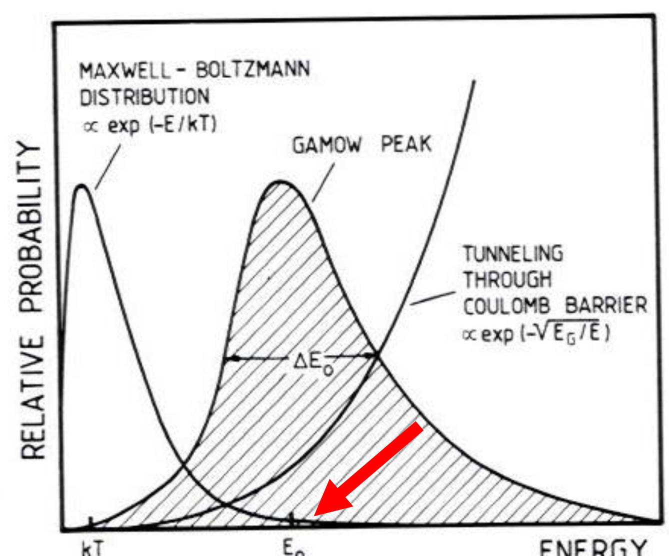
- La condizione df/dE=0 determina la posizione del massimo

$$E_0= (1/2\ kT)^{2/3}\ E_C^{1/3}$$

- Poiche' E_C >>kT si ha E_0 >kT cioe' il massimo contributo alla reazione si ha dalle collisioni con energie maggiori di quelle termiche
- Ad es, per T=1.5 10^7 ^{0}K si ha kT=1.2 keV e:

p+p	:	E_0=5.9keV
α+^{12}C	:	E_0=56 keV
^{16}O+ ^{16}O	:	E_0=237 keV

- Notare come E_0 cresca rapidamente all'aumentare di Z



L'altezza del picco

$$<\sigma v> = (8/\pi m)^{1/2} \frac{S(E_0)}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty dE \exp[-E/kT - (E_c/E)^{1/2}]$$

- Il valore dell'integrando I(E) nel punto di massimo, I_{max}, si ottiene dal valore di f per E= E_0:
- I_{max}= exp(-f(E_0)= exp(-3 E_0 /kT)
- La dipendenza dalla temperatura e' tramite la variabile

  τ= 3E_0/KT = 3/$2^{2/3}$ (E_C /kT)$^{1/3}$
- Nelle stesse condizioni di prima (T=1.5 10^7 ^{0}K ossia kT=1.2 keV)

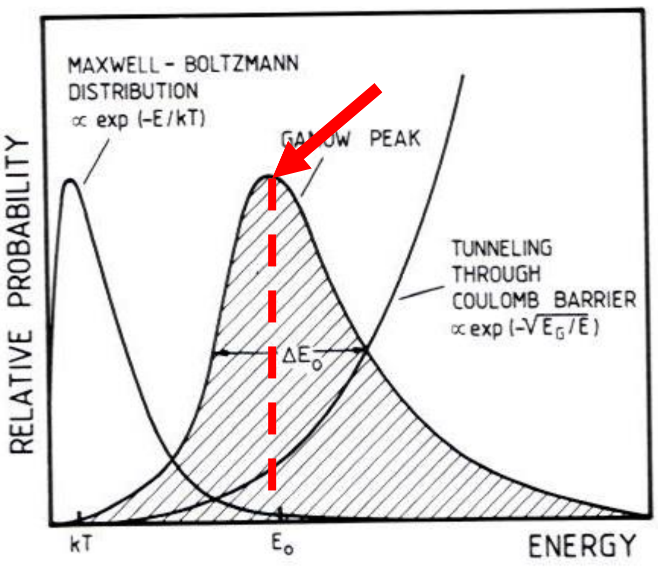
p+p : E_0=5.9keV ; I_{max}= 1.1 10^{-6}

α+^{12}C: E_0=56 keV; I_{max}= 3 10^{-57}

^{16}O+ ^{16}O: E_0=237 keV; I_{max}= 6 10^{-239}

- Poiche' <σv> e' proprorzionale a I_{max}, questi numeri mostrano la gerarchia della combustione nelle stelle.

- Vengono prima consumati gli elementi piu' leggeri.
- Quando questi sono esauriti, la stella si contrae, aumentando la temperatura in modo da poter bruciare gli elementi prodotti nella fase di combustione precedente



La larghezza del picco

$$< \sigma v >= (8/\pi m)^{1/2} \frac{S(E_0)}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty dE \exp[-E/kT - (E_c/E)^{1/2}]$$

- Ogni funzione a campana puo' essere localmente approssimata con una Gaussiana intorno al suo massimo:

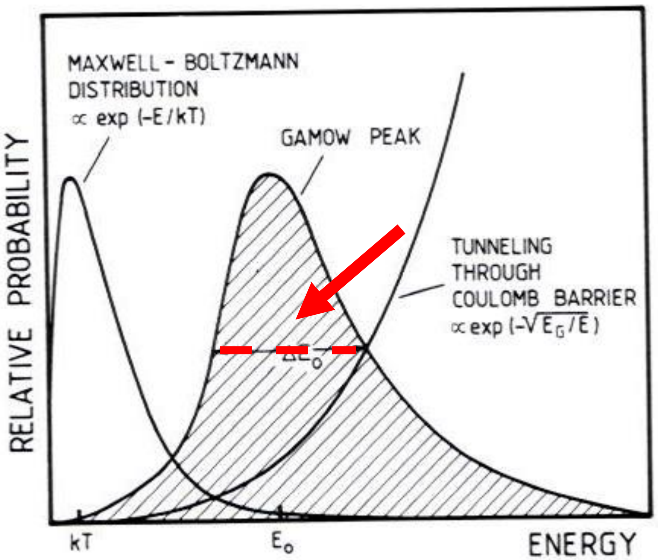
  $I(E) = I_{max} \exp[-(E-Eo)^2/\delta^2]$
- La semilarghezza δ della gaussiana corrisponde a quando la funzione e' calata ad 1/e rispetto al valore di massimo.
- Poiche' I = exp-f(E), sviluppando f intorno ad E_0 ho:
- $f=f(E_0) + 1/2\, f''(E_0)\, (E- E_0)^2$
- Da cui:
- segue :

  $\delta = [-2 /f''(E_0)]^{1/2}$
- Calcolando la derivata si trova

  $\delta = 2\, 3^{-1/2} (E_0\, kT)^{1/2}$

- Cioe' δ e' circa la media geometrica fra E_0 e kT

Per cio' che riguarda la dipendenza dalla temperatura, da $E_0 \propto T^{2/3}$ segue $\delta \propto T^{5/6}$



Il valore dell'integrale

$$<\sigma v>= (8/\pi m)^{1/2} \frac{S(E_0)}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty dE \exp[-E/kT - (E_c/E)^{1/2}]$$

- Nell' approssimazione Gaussiana, cioe' I(E)= I_{max} exp [- (E-Eo)^2/δ^2]
- l'integrale e' una error function:

$$\int_0^\infty dEI(E) = I_{\max} \int_0^\infty dE \exp[-(E-E_0)^2/\delta^2]$$

- Se δ<<E posso spostare l'estremo d'integrazione a –∞ ottenendo:

$$I_{\max}\delta\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}\delta \exp(-3E_o/kT)$$

- Da cui ho l'espressione finale per la velocita' di reazione:

$$<\sigma v>\cong 2(2/m)^{1/2} S(E_o) \frac{\delta}{(kT)^{3/2}} \exp(-3E_o/kT)$$

- Che possiamo verificare dimensionalmente

- I punti salienti del cammino percorso sono:
- i)il contributo alla velocita' di reazione viene dalle collisioni vicino a E_o ; e' questa la regione che occorre studiare in laboratorio per predire l'efficienza di una reazione
- ii)La velocita' delle reazioni termonucleari dipende fortemente dalla temperatura, principalmente tramite il termine esponenziale

La velocita' di reazione in funzione della temperatura

$$< \sigma v > \cong 2(2/m)^{1/2} S(E_o) \frac{\delta}{(kT)^{3/2}} \exp(-3E_o/kT)$$

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{3}} (E_o kT)^{1/2}$$

$$E_o = 2^{-2/3} (kT)^{2/3} E_c^{1/3}$$

- Ogni funzione y, per piccole variazioni di un parametro x intorno a x_o puo' essere espressa in termini di una potenza:

  $y=y(x_o)\ (x/\ x_o)^{\alpha}$.
- Per determinare l' 'esponente α osservo che derivando ambo i membri:

  $dy/dx = \alpha\ (y/x)$
- Da cui α e' la derivata logaritmica nel punto x_o:

  $\alpha=(dy/dx)x/y=d\ \mathit{ln}y/d\ \mathit{ln}x$
- La dipendenza dalla temperatura di $<\sigma v>$ e' principalmente nel termine esponenziale, per cui

  $\ln<\sigma v> = \text{cost} - 3E_o/kT= \text{cost} -3AT^{-1/3}$
- Ne segue che

  $\alpha = T\ d\ (\ln<sv>)/dT = AT=E_o/kT$

- Quindi la rapidita' con cui variano le velocita' di reazione e' essenzialmente data dal rapporto fra l'energia del picco e l'energia termica*:

  $\alpha = E_o/kT$
- Per gli esempi consueti (kT=1.2 keV)

  p+p : E_0=5.9keV α_{pp}=4.9 ;

  $\alpha+{}^{12}C$: E_0=56 keV ; α_C=47

  ${}^{16}O+{}^{16}O$: E_0=237 keV α_O=20

* *i termini pre esponenziali danno un'ulteriore coefficiente, -2/3*

La velocita' di reazione in funzione della temperatura II

$$< \sigma v > \cong 2(2/m)^{1/2} S(E_o) \frac{\delta}{(kT)^{3/2}} \exp(-3E_o/kT)$$

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{3}}(E_o kT)^{1/2}$$

$$E_o = 2^{-2/3}(kT)^{2/3} E_c^{\,1/3}$$

- Abbiamo visto che le velocita' di reazione, intorno a una temperatura T, posso essere parametrizzate come

  $<\sigma v> = c\ T^{\alpha}$

- Dove il coefficiente α e' dato approssimativamente da

  $\alpha = E_o/kT = c'\ T^{-1/3}$

- Poiche' α e' lentamente variabile con la temperatura, α caratterizza la reazione.
- Osserviamo che gli α crescono assieme con le cariche dei nuclei reagenti e possono essere grandi
- Cio' significa che piccole variazioni di temperatura danno grandi variazioni delle velocita' di reazione, da cui :

- i)una stella non brucia un determinato elemento finche' non ha raggiunto una temperatura di innesco

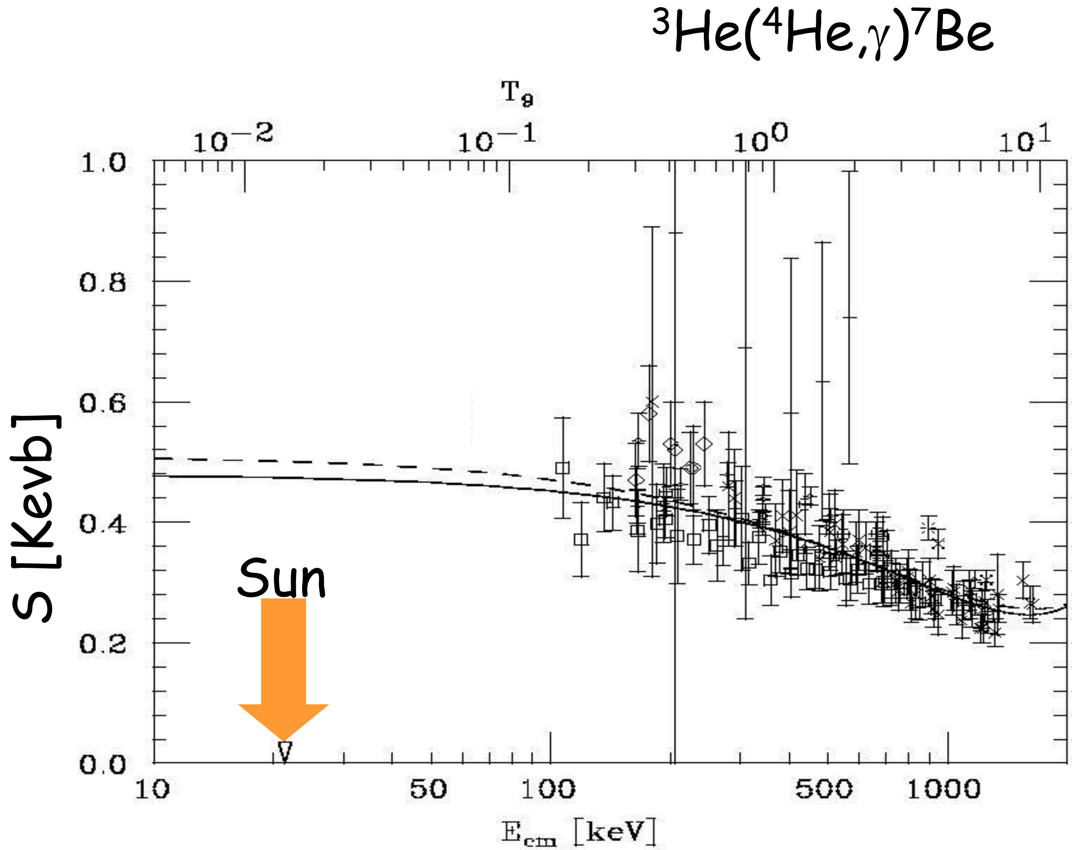
- ii)le stelle sono relativamente insensibili ai valori di S, poiche' l'efficiacia di una reazione dipende principalmente da T

- iii)se si misurano le velocita' di reazione in una stella (ad esempio rivelando i neutrini emessi nella reazione) si sta misurando la temperatura della stella nella zona di produzione

Experimental Determination of the astrophysical S- factor

- Nuclear physics is summarized in S(E), which (in absence of resonances) is a smooth function of E

- What matters is the value of S at or near the Gamow peak Eo
- The measurement near the Gamow peak is generally impossible and one has to extrapolate data taken at higher energies.



The lowest energies frontier

- Significant effort has been devoted for lowering the minimal detection energy
- Since counting rates become exponentially small, cosmic ray background is a significant limitation.
- This has been bypassed by installing accelerators deep underground* (The LUNA project at Gran Sasso)

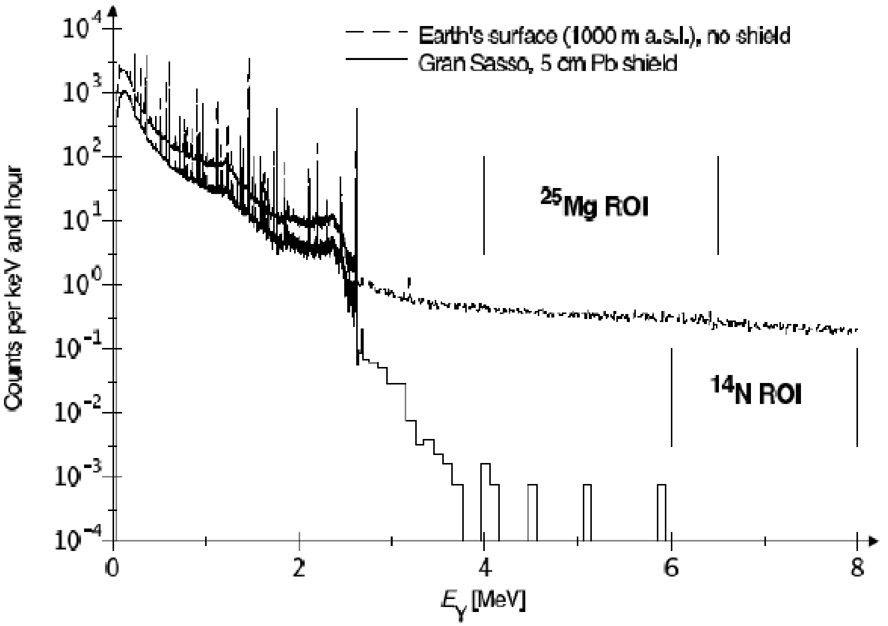
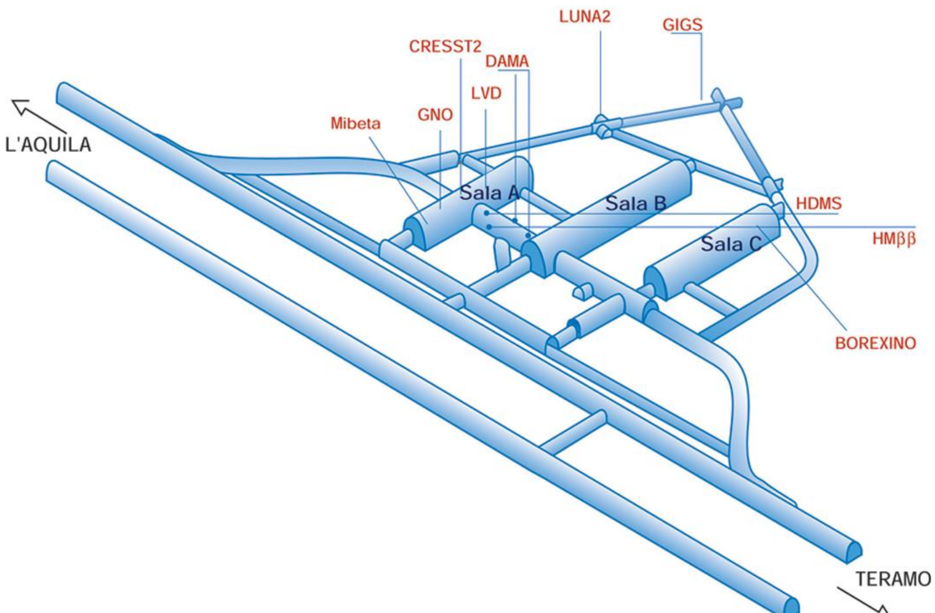


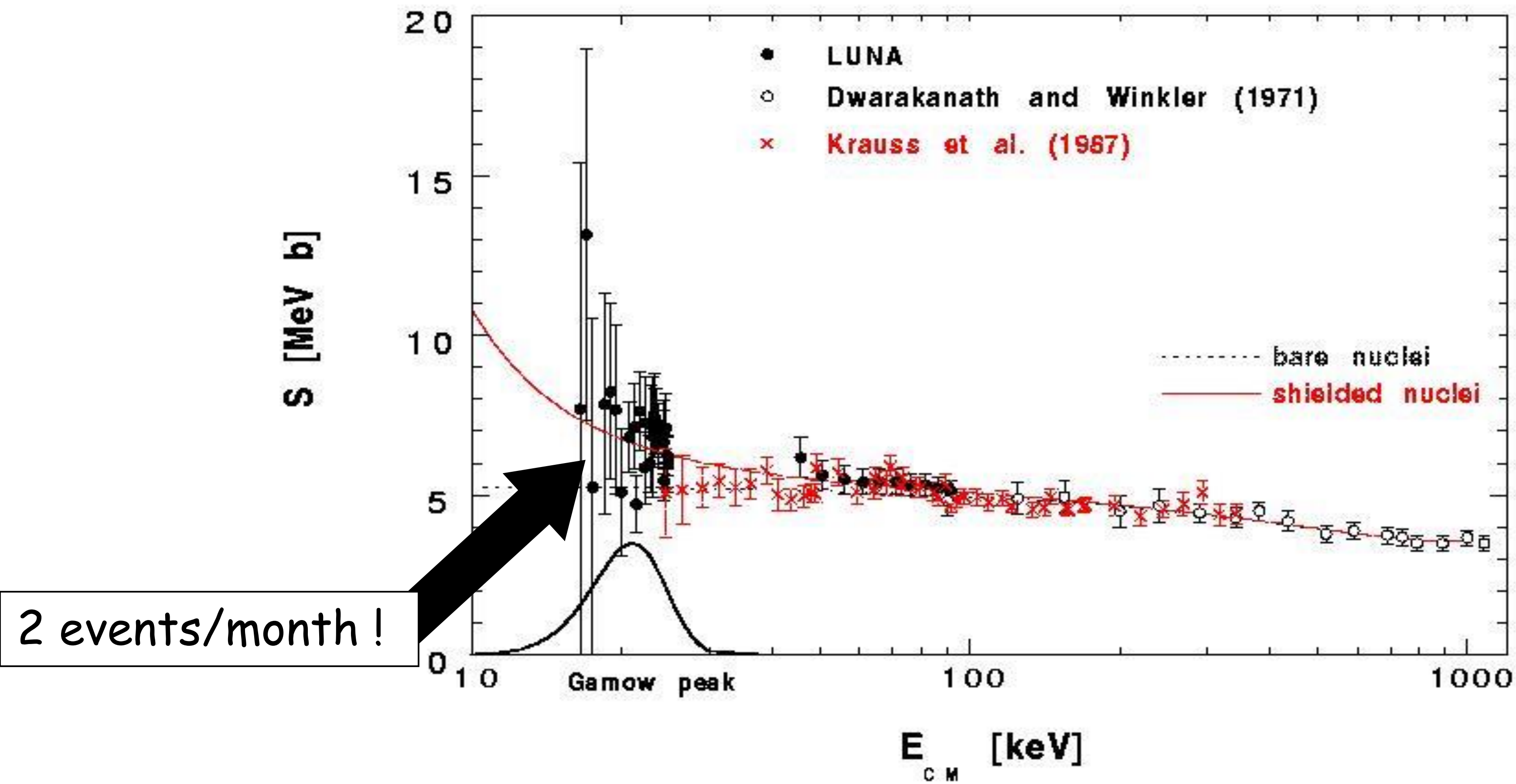
Fig. 2. Laboratory γ background as seen with the germanium detector of setup A at the earth's surface (1000 m above sea level) and inside the Gran Sasso underground facility.



*Fiorentini, Kavanagh and Rolfs (1991)

One of LUNA results*

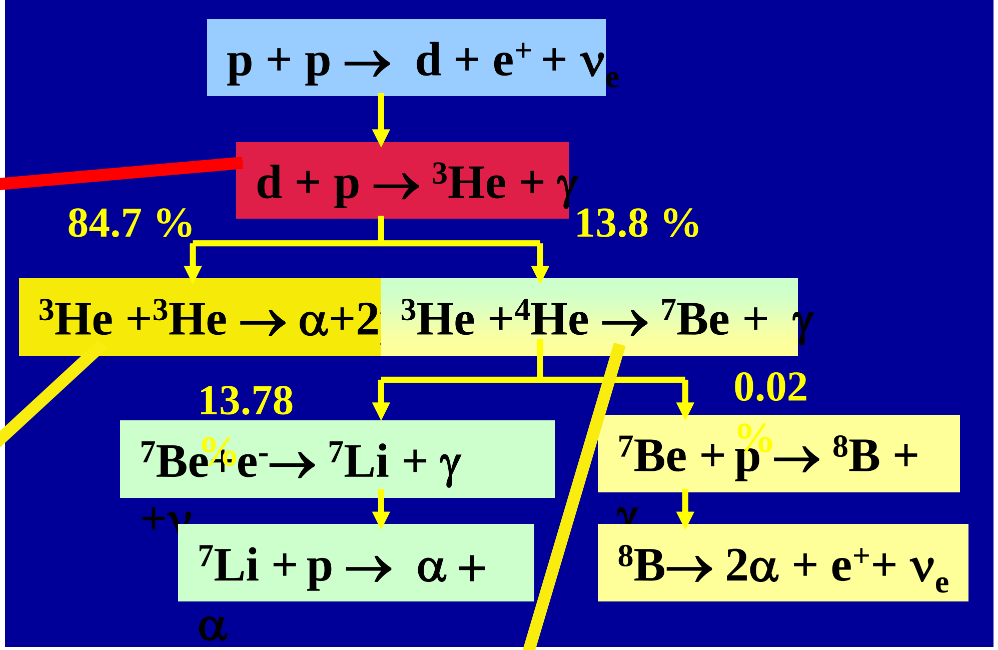
- LUNA at LNGS has been able to measure $^3He+^3He$ at solar Gamow peak.

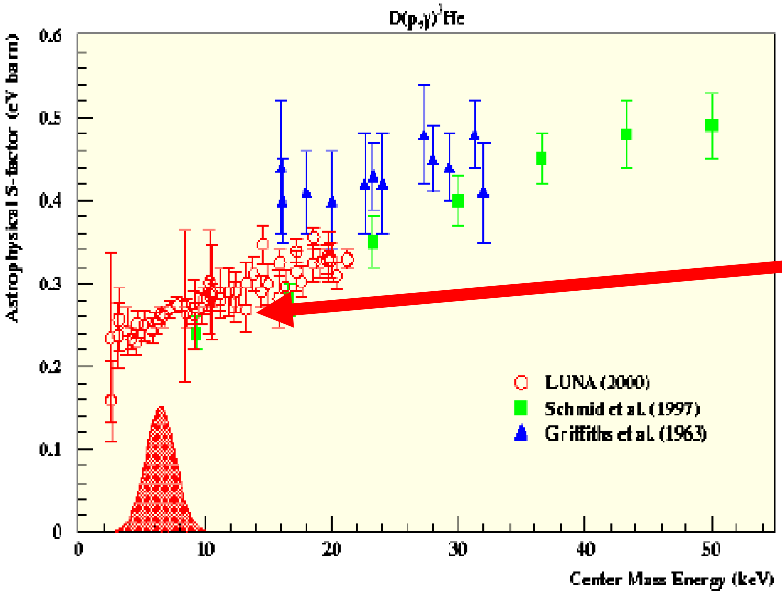


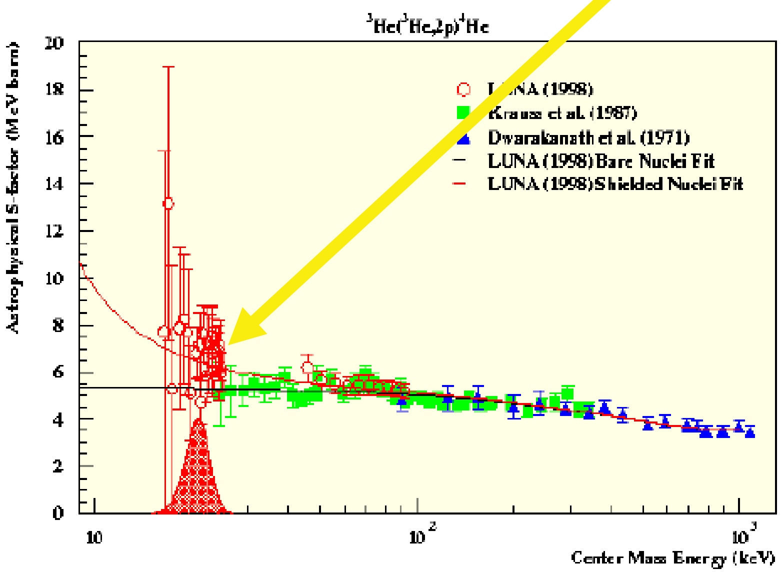
S(0)=5.32 (1± 6%)MeVb

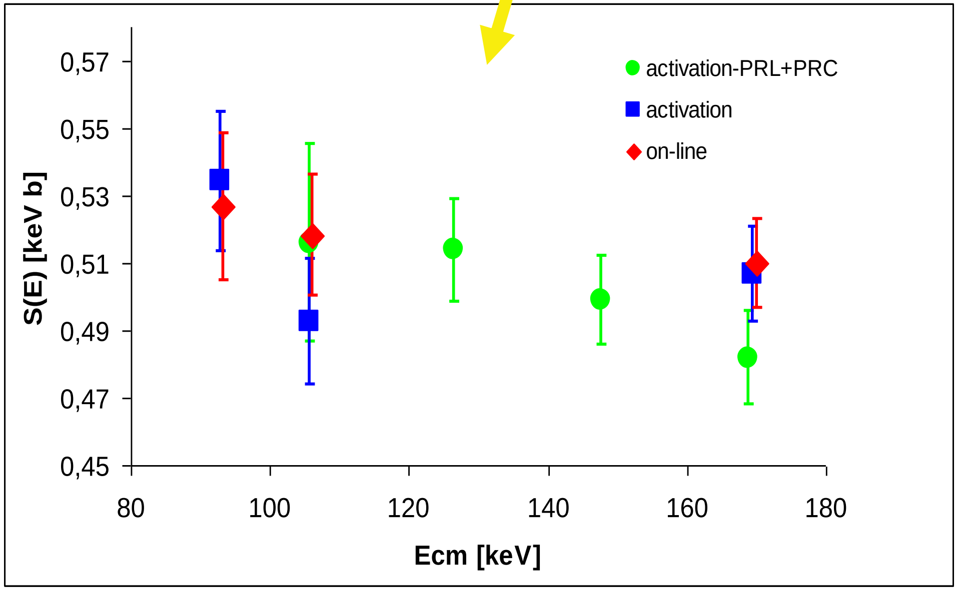
*PRL 82(1999) 5205

pp chain as studied by LUNA



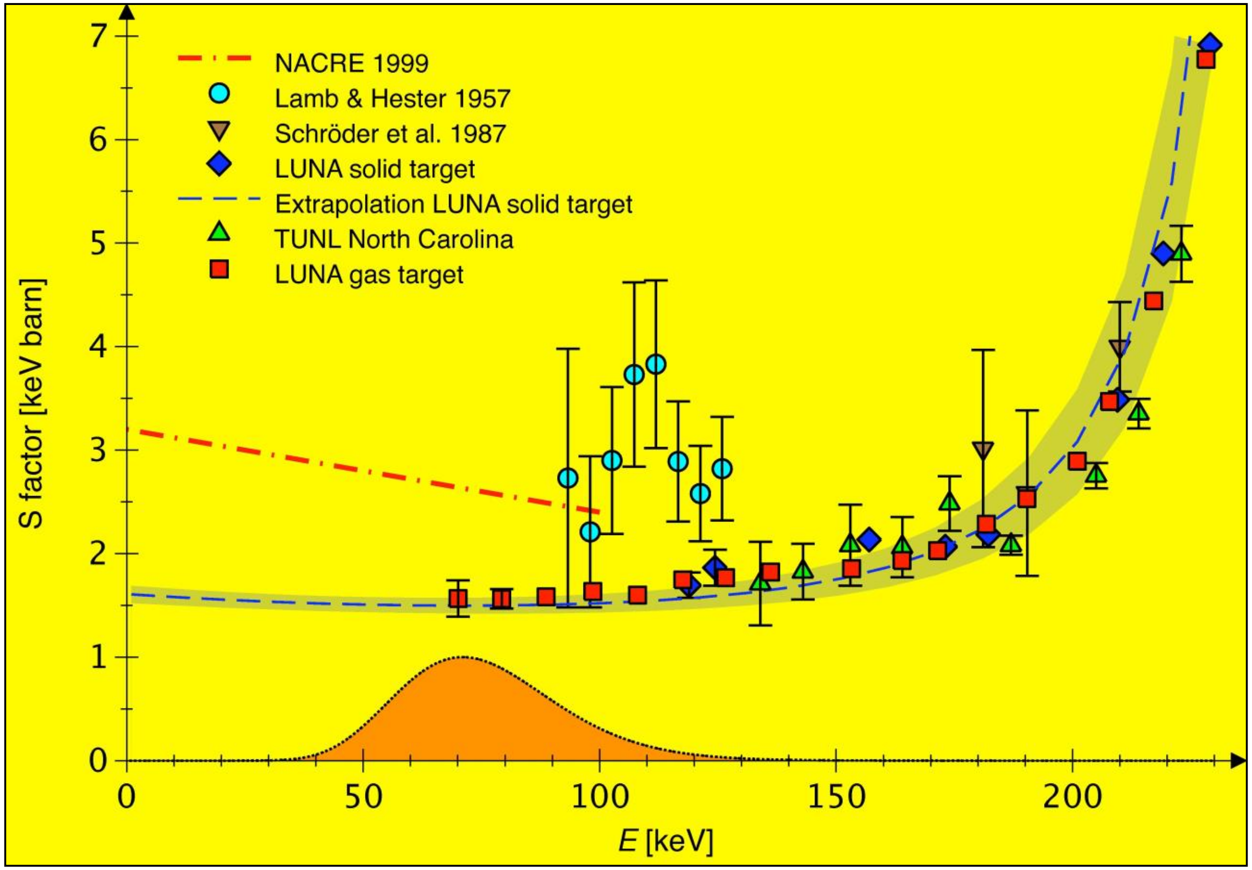






CNO: LUNA results on p+ ^{14}N

- p+ ^{14}N -> 15O + γ is the key reaction governing the CNO cycle in the Sun.
- Note that the extrapolation from recent LUNA results is a factor ½ with respect to previous estimates



Appendice 1: calcolo di integrali Gaussiani

- Due integrali sono particolarmente utili

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\pi/\alpha} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^{2n} e^{-\alpha x^2} = \left| \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \sqrt{\pi/\alpha} \right|$$

- Se chiamo I il primo integrale, posso scrivere

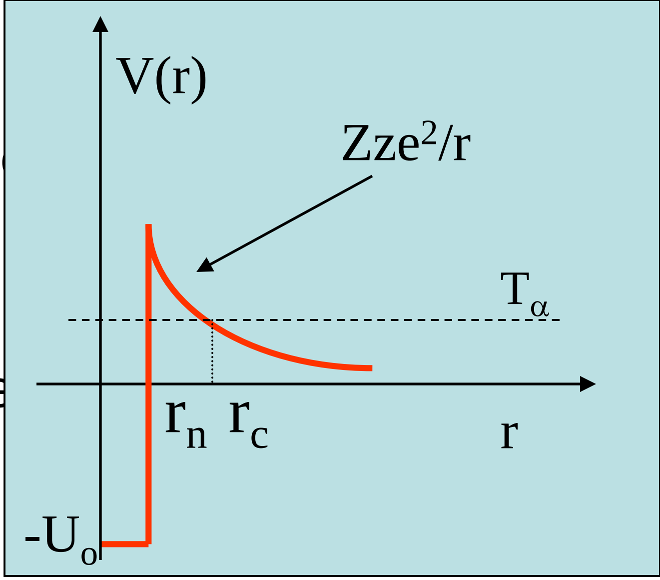
$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\alpha y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy e^{-\alpha (x^2+y^2)} =$$

$$2\pi \int_{o}^{+\infty} \rho d\rho e^{-\alpha \rho^2} = \pi \int_{o}^{+\infty} dz e^{-\alpha z} = \pi/\alpha$$

Da cui I= $(\pi/\alpha)^{1/2}$

- Il secondo e' ovvio

Appendice2 : la probabilità di tunnel della particella α



- Il moto radiale della particella α può essere trattato come un moto unidimensionale, da cui :

  $P = \exp\{-2\int_{rn}^{rc} dr\, [2m_\alpha (V(r) - T_\alpha)]^{1/2} /\hbar\} =$
  $= \exp\{-2\int_{rn}^{rc} dr\, [2m_\alpha (V(r) - V(r_c))]^{1/2} /\hbar\}.$

$$P = \exp\{-2\int_{x1}^{x2} dx[2m(V(x)-E)]^{1/2} /\hbar\}$$

- Esplicitando $V = Zze^2/r$ e trasformando la variabile di integrazione in $x=r/r_c$ si ha:
  $P=\exp \{-2 (2m_\alpha Zze^2 r_c/\hbar^2)^{1/2} \int_{rn/rc}^{1} dx\, [1/x-1]^{1/2} \}.$
- Osservando che che $r_n \ll r_c$ si può approssimare l'estremo inferiore con 0.

- Poiché $\int_0^1 dx\, [1/x-1]^{1/2} = \pi/2$ si trova $P= \exp \{-2 (2m_\alpha Zze^2 r_c/\hbar^2)^{1/2} \pi/2 \}$ da cui:

$$\boxed{P=\exp\{-2\pi\, v_o/v_\alpha\}}$$

  dove:
  - $v_o = Zze^2/\hbar$ è la scala di velocità del problema coulombiano con cariche Z e z
  - $v_\alpha = (2T_\alpha/m_a)^{1/2}$ è la velocità finale della particella α
- Da osservare che P dipende esponenzialmente da $1/v_\alpha$ e dunque esponenzialmente da $1/\sqrt{T_\alpha}$.
- Ponendo $\lambda=\nu P$, usando la (1) e passando al logaritmo, si trova la legge di Geiger Nuttal, ($\ln\lambda=\alpha-\beta/\sqrt{T_\alpha}$) e si determinano i coefficienti ($\alpha=\ln\nu$, $\beta=2\pi zZe^2M/2^{1/2}/\hbar$) in accordo con i dati sperimentali.